Avgust 2017

Matura

Matematika

osnovna raven

1. Zapišite enačbo premice **p** , ki poteka skozi točki **T_1(4, 1)** in **T_2(-2, 4)** . Določite ordinato **y_3** točke **T_3(-12, y_3)** , da bo ležala na premici **p** .

(6 točk)

Rešitev:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{4-1}{-2-4} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-4)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

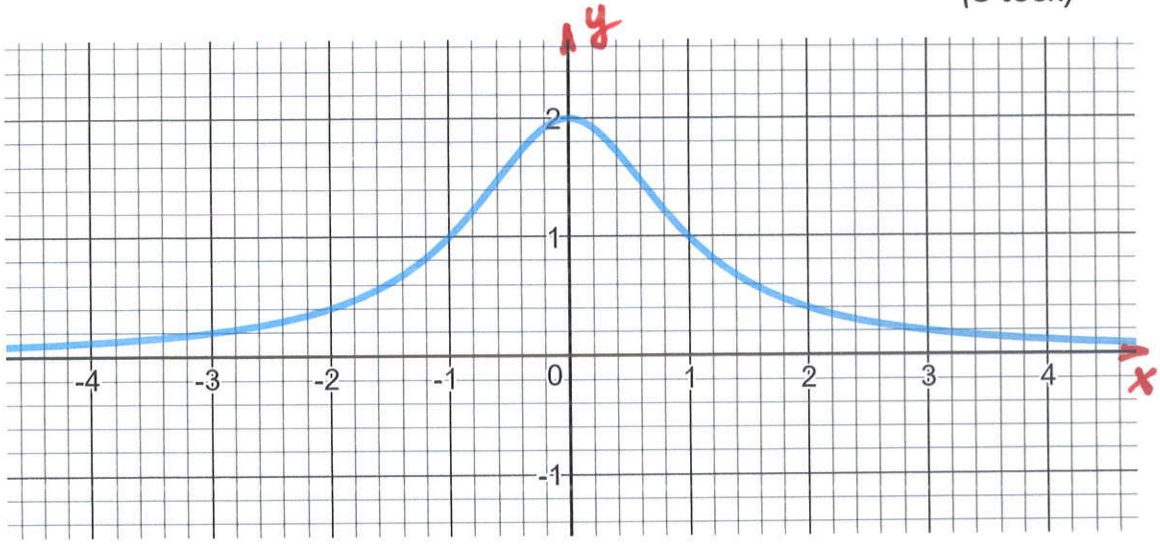
$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}x_3 + 3 = -\frac{1}{2}(-12) + 3$$

$$\boxed{y_3 = 9}$$

2. Na sliki je del grafa odvedljive funkcije **f**, ki se simetrično bliža abscisni osi in je simetričen glede na ordinatno os. Funkcija **f** nima ničel. Zapišite ugotovitve ki veljajo za to funkcijo in se dajo razbrati iz grafa.

(8 točk)



Definicijsko območje funkcije	$D_f =$
Zaloga vrednosti funkcije	$Z_f =$
Koordinati presečišča grafa funkcije **f** z ordinatno osjo	$f(0) =$ T(,)
Vrednost funkcije **f** pri **x=-1**	$f(-1) =$
Za kateri **x** funkcija **f** doseže globalni maksimum?	$x =$
Ali je funkcija **f** soda ali liha? Odgovor utemeljite.	
Zapišite vrednost **f´(0)**	$f'(0) =$

Rešitev:

Definicijsko območje funkcije	$D_f = \mathbb{R}$
Zaloga vrednosti funkcije	$Z_f =(0, 2]$
Koordinati presečišča grafa funkcije **f** z ordinatno osjo	$f(0) = 2$ T(0 , 2)
Vrednost funkcije **f** pri **x=-1**	$f(-1) = 1$
Za kateri **x** funkcija **f** doseže globalni maksimum?	$x = 0$
Ali je funkcija **f** soda ali liha? Odgovor utemeljite.	f je soda, ker je graf simetričen glede na y os.
Zapišite vrednost **f´(0)**	$f'(0) = 0$

3. Vsota dolžin katet pravokotnega trikotnika je **56**, dolžina njegove hipotenuze je **40**. Izračunajte dolžini katet.

(6 točk)

Rešitev:

$$a + b = 56 \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = 56 - a \qquad a^2 + (56 - a)^2 = (40)^2$$

$$a^2 + 3136 - 112a + a^2 - 1600 = 0$$

$$2a^2 - 112a + 1536 = 0 \ /:2$$

$$a^2 - 56a + 768 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-56)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768 = 64$$

$$a_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$a_{1/2} = \frac{-(-56) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{56 \pm 8}{2}$$

$$a_1 = 24 \qquad a_2 = 32$$

$$b_1 = 56 - a_1 = 56 - 24 \qquad b_2 = 56 - a_2 = 56 - 32$$

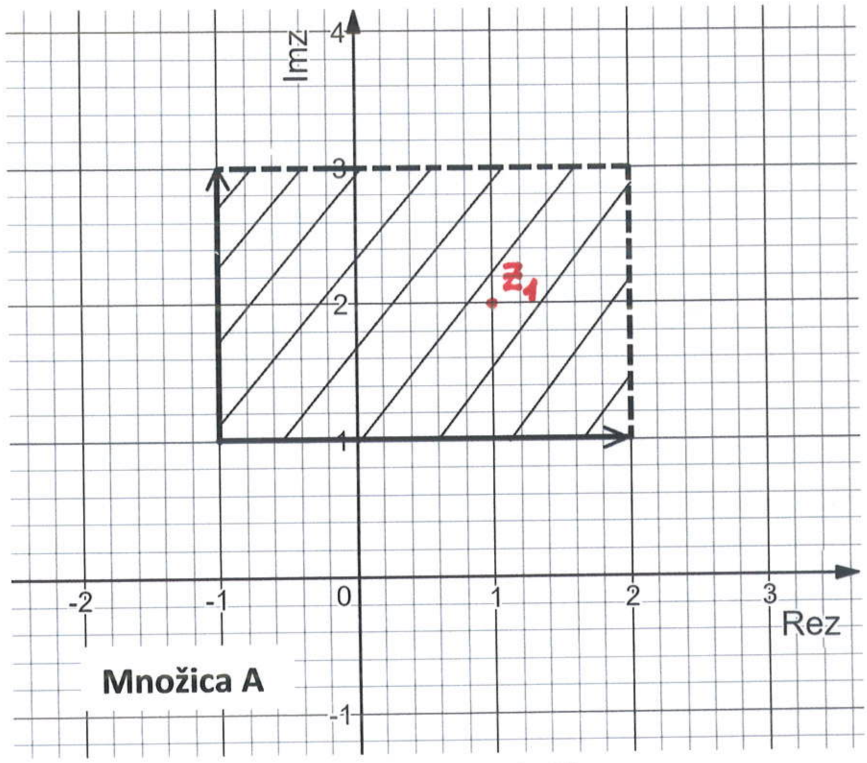
$$b_1 = 32 \qquad b_2 = 24$$

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = 24 \\ b_1 = 32 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} a_2 = 32 \\ b_2 = 24 \end{matrix}}$$

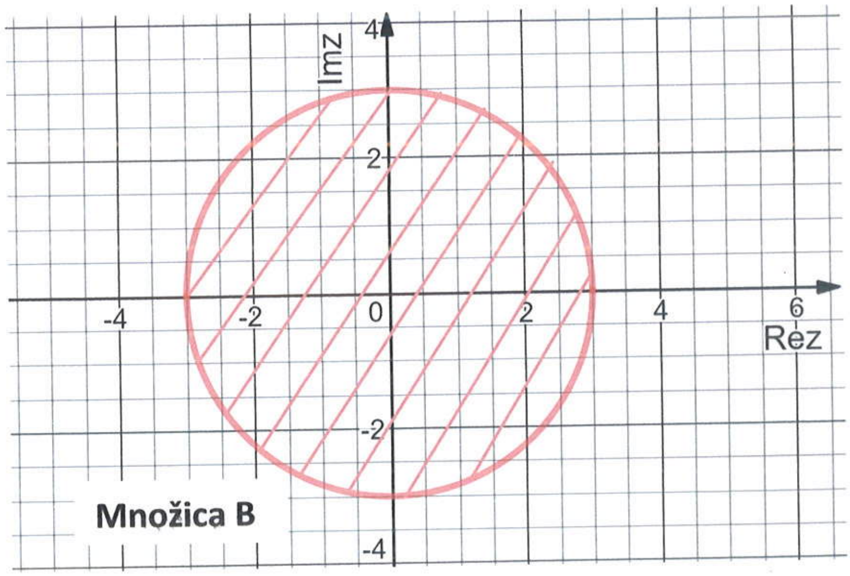
4. V kompleksni ravnini narišite množici točk
$\mathbf{A} = \{z \in \mathbb{C};\ (-1 \leq Rez < 2) \wedge (1 \leq Imz < 3)\}$
in $\mathbf{B} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 3\}$
Izberite eno število $\mathbf{Z_1}$ iz množice **A** in ga zapišite v obliki
$\mathbf{Z_1 = a + bi}$; $\mathbf{a, b \in \mathbb{R}}$.

(6 točk)

Rešitev:



$\mathbf{Z_1 = 1+2i}$



5. Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \left(\frac{2x^2 - 3}{x} + \sqrt[3]{x^2} - e^x + 5 \right) dx$$

(8 točk)

Rešitev:

$$\int \left(\frac{2x^2}{x} - \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^2} - e^x + 5 \right) dx =$$

$$= \int \left(2x - 3x^{-1} + x^{\frac{2}{3}} - e^x + 5 \right) dx =$$

$$= 2\frac{x^{1+1}}{1+1} - 3\ln x + \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - e^x + 5x + C =$$

$$= 2\frac{x^2}{2} - 3\ln x + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - e^x + 5x + C =$$

$$= x^2 - 3\ln x + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - e^x + 5x + C =$$

$$= x^2 - 3\ln x + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - e^x + 5x + C =$$

$$= x^2 - 3\ln x + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^3 x^2} - e^x + 5x + C =$$

$$= x^2 - 3\ln x + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - e^x + 5x + C$$

$$\boxed{x^2 - 3\ln x + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - e^x + 5x + C}$$

6. Točke **A**, **B** in **S** ležijo v ravnini **xy**. Točka **S**$(-\frac{1}{2};\frac{7}{2})$ je razpolovišče daljice **AB**. Zapišite koordinati točke **B**, če je **A(3, 4)**. Ali sta krajevna vektorja $\vec{r}_A$ in $\vec{r}_B$ **pravokotna**? Odgovor utemeljite.

(7 točk)

Rešitev:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{3 + x_B}{2} \quad /\cdot 2$$

$$-1 = 3 + x_B$$

$$-1 - 3 = x_B$$

$$x_B = -4$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{4 + y_B}{2} \quad /\cdot 2$$

$$7 = 4 + y_B$$

$$7 - 4 = y_B$$

$$y_B = 3$$

$$\boxed{\mathbf{B(-4;3)}}$$

$$\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B = (3;4) \cdot (-4;3) = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 =$$
$$= -12 + 12 = 0$$

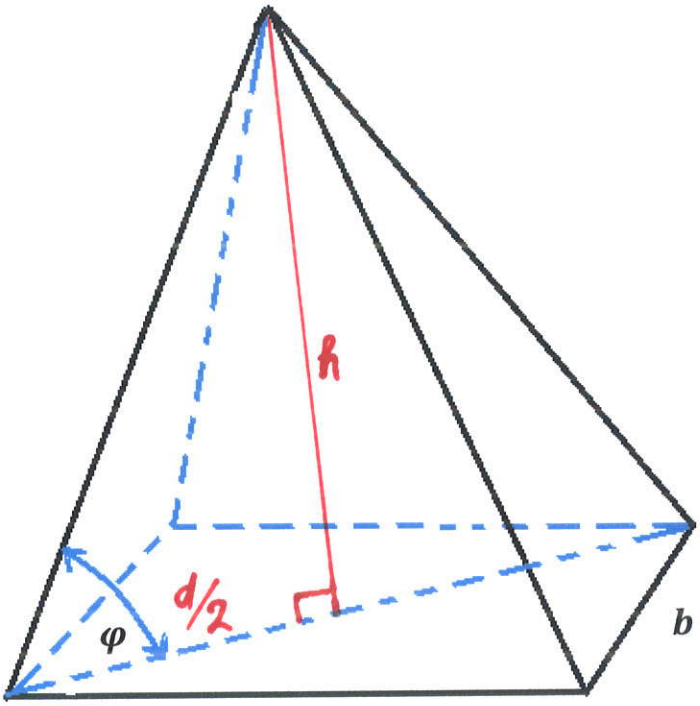
Če je skalarni produkt dveh neničelnih vektorjev enak nič, potem sta ta dva vektorja pravokotna.

$$\boxed{\textit{Krajevna vektorja } \vec{r}_A \textit{ in } \vec{r}_B \textit{ sta pravokotna.}}$$

7. Osnovna ploskev pokončne piramide je pravokotnik s stranicama **a=12** in **b=5** , višina piramide pa je **8**. Narišite skico in na njej označite kot φ med stranskim robom in osnovno ploskvijo. Izračunajte prostornino piramide in velikost kota φ na desetinko stopinje natančno.

(7 točk)

Rešitev:



$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 5 \cdot 8$$

$$V = 160$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = 12^2 + 5^2$$

$$d^2 = 169$$

$$d = \sqrt{169} = 13$$

$$\frac{d}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

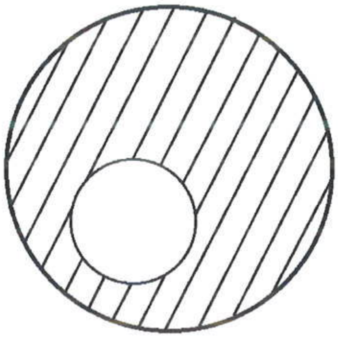
$$\tan \varphi = \frac{h}{d/2} = \frac{8}{6{,}5}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{8}{6{,}5}\right)$$

$$\boxed{V = 160}$$

$$\boxed{\varphi = 50{,}9^\circ}$$

8. Na sliki je označeno območje v ravnini **xy** , ki ga omejujeta krivulji, dani z enačbama $(x-3)^2+y^2=9$ in $x^2+y^2-6x+2y+8=0$.



Izračunajte ploščino osenčenega območja med krivuljama. Rezultat naj bo točen.

(6 točk)

Rešitev:

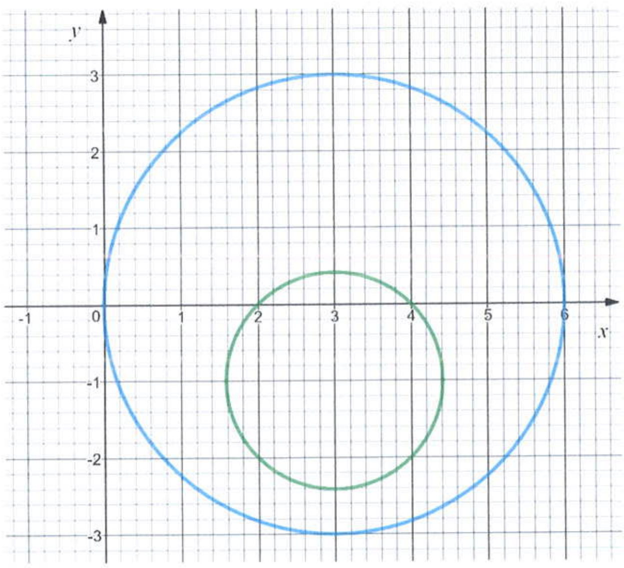
$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \qquad S(p,q)$$

$$(x-3)^2+y^2=9$$

Prva krožnica ima središče $S_1(3,0)$ *in polmer* $r_1=3$.

$$x^2+y^2-6x+2y+8=0$$
$$x^2-6x+y^2+2y+8=0$$
$$x^2-6x+9-9+y^2+2y+1-1+8=0$$
$$(x^2-6x+9)-9+(y^2+2y+1)-1+8=0$$
$$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)=9+1-8$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=2$$

Druga krožnica ima središče $S_2(3,-1)$ *in polmer* $r_2=\sqrt{2}$.



$$S=\pi\cdot r^2$$

$$S_1=\pi\cdot 3^2=9\pi$$

$$S_2=\pi\cdot\sqrt{2}^2=2\pi$$

$$S=S_1-S_2=9\pi-2\pi=7\pi$$

$$\boxed{S=7\pi}$$

9. Koti α, β in γ so ostri koti trikotnika. Brez uporabe računala dokažite da je $\sin\gamma = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ če je $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ in $\beta = 30°$.

(6 točk)

Rešitev:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ *Vzamemo + zato, ker je α oster kot.*

$\sin\beta = \sin 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos\beta = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha + \beta)) =$

$= \sin 180° \cdot \cos(\alpha + \beta) - \cos 180 \cdot \sin(\alpha + \beta) =$

$= 0 \cdot \cos(\alpha + \beta) - (-1) \cdot \sin(\alpha + \beta) =$

$= 0 + \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}+1}{6}$

$$\boxed{\sin\gamma = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}}$$

10. Izmed prvih **30** naravnih števil naključno izberemo **dve** števili.
Izračunajte verjetnost dogodkov:

A = obe števili sta sodi

B = vsaj eno število je večkratnik števila **3** .

(7 točk)

Rešitev:

a) ***15*** *števil je sodih*

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$$

in ***15*** *števil je lihih*

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{15}{2} \cdot \binom{15}{0}}{\binom{30}{2}} = \frac{105 \cdot 1}{435} = \frac{7}{29}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{7}{29}}$$

b) ***10*** *števil so večkratniki števila* ***3***

$$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

in ***20*** *števil niso večkratniki števila* ***3***

$$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29\}$$

Računamo z nasprotnim dogodkom:

$$P(vsaj\ eno) = 1 - P(niti\ eno)$$

$$P(B) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{30}{2}} = 1 - \frac{1 \cdot 190}{435} = 1 - \frac{38}{87} = \frac{49}{87}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{49}{87}}$$

11. Ceno puloverja so znižali za **20%**, a ker ni šel v prodajo, so ga pocenili še za **30%**. Po drugi pocenitvi ga je Jan kupil in zanj plačal **30,24€**. Odgovorite v povedih na spodnja vprašanja.

Koliko odstotkov prvotne cene je Jan plačal?

Kolikšna je bila začetna cena puloverja?

Kolikšna je bila cena puloverja neposredno pred drugim znižanjem?

(5 točk)

Rešitev:

$$p_1 = -20\%$$

$$p_2 = -30\%$$

$$C_3 = 30{,}24€$$

$$C_3 = \frac{(100-30)}{100} C_2$$

$$C_3 = 0{,}7 \cdot C_2$$

$$C_2 = \frac{C_3}{0{,}7} = \frac{30{,}24}{0{,}7}$$

$$C_2 = 43{,}2\ €$$

$$C_2 = \left(\frac{100-20}{100}\right) \cdot C_1 = 0{,}8 \cdot C_1$$

$$C_1 = \frac{C_2}{0{,}8} = \frac{43{,}2}{0{,}8} = 54€$$

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{30{,}24}{54} = 0{,}56 = 56\%$$

*Jan je plačal **56%** prvotne cene.*

*Začetna cena je bila **54€**.*

*Cena pred drugim znižanjem je bila **43,2€**.*

12. Zaporedje je dano s splošnim členom $a_n = \frac{1+2^n}{4^n}$

12.1. Izračunajte in zapišite prve tri člene danega zaporedja. *(2)*

12.2. Izračunajte limito danega zaporedja. *(1)*

12.3. Zapišite zaporedje kot vsoto dveh geometrijskih zaporedij in izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(5)*

(8 točk)

Rešitev:

12.1. $a_1 = \frac{1+2^1}{4^1} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$a_2 = \frac{1+2^2}{4^2} = \frac{5}{16}$

$a_3 = \frac{1+2^3}{4^3} = \frac{9}{64}$

$$\boxed{a_1 = \frac{3}{4} \quad a_2 = \frac{5}{16} \quad a_2 = \frac{9}{64}}$$

12.2. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2^n}{4^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2^n}{2^n \cdot 2^n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{4^\infty} + \frac{1}{2^\infty}\right) = \left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right) = (0+0) = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

12.3. $$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2^n}{4^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{4^n} = \frac{4}{3}}$$